

مکانیک سیالات ۲

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک



بخش دوم از ادامه مطالب فصل پنجم

کلاس درس دکتر نوروزی
اسفند ۹۹

گروه های بی بعد مهم در مکانیک سیالات

رابطه ریاضی	نام گروه بی بعد	رابطه ریاضی	نام گروه بی بعد
$C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2}$	ضریب فشار (Pressure Coefficient)	$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$	عدد رینولدز (Reynolds Number)
$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho A V^2}$	ضریب درگ (پسا) (Drag Coefficient)	$Ma = \frac{U}{c}$	عدد ماخ (Mach Number)
$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho A V^2}$	ضریب لیفت (برا) (Lift Coefficient)	$Fr = \frac{U}{\sqrt{Lg}}$	عدد فرود (Froude Number)
$C_f = \frac{\tau_{wall}}{\frac{1}{2} \rho V^2}$	ضریب اصطکاک پوسته ای (Skin Friction Coefficient)	$We = \frac{V}{\sqrt{\sigma / (\rho L)}}$	عدد وبر (Weber Number)
$St = \frac{\omega L}{V}$	عدد اشترومال (Strouhal Number)	$Ca = \frac{\mu V}{\sigma}$	عدد موئینگی (Capillary Number)
$f = \frac{h_{loss}}{V^2} \frac{L}{2g d}$	ضریب اصطکاک (Friction Factor)	$Bo = \frac{\rho L^2 g}{\sigma}$	عدد بوند (Bond Number)
$Ca = \frac{p - p_v}{\rho V^2}$	عدد کاویتاسیون (Cavitation Number)	$Ro = \frac{U}{L \Omega_{Earth}}$	عدد روزبی (Rossby Number)

دیمانسیون کمیتها در مکانیک سیالات

به طور کلی در مکانیک سیالات پارامترهای فیزیکی بر اساس دیمانسیون به دو شکل زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mass} & & \text{Force} \\ \{MLT\} : \rightarrow \text{Length} & \text{یا} & \{FLT\} : \rightarrow \text{Length} \\ \text{Time} & & \text{Time} \end{array}$$

دیمانسیون سایر کمیت ها بر حسب ترکیبی از یکی از دو حالت فوق قابل بیان هستند. برای این منظور صرفا کافی است یک رابطه فیزیکی برای تعریف کمیت بدانیم، مثلا:

کمیت	رابطه فیزیکی	دیمانسیون (MLT)
سرعت	$V = \frac{dx}{dt}$	$\frac{L}{T} = LT^{-1}$
چگالی	$\rho = \frac{m}{V}$	$\frac{m}{L^3} = ML^{-3}$
نیرو	$F = ma = m \frac{dV}{dt}$	$M \frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$
تنش	$\tau = \frac{F}{A}$	$\frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$
ویسکوزیته	$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \mu = \frac{\tau}{\frac{\partial u}{\partial y}}$	$\frac{ML^{-1}T^{-2}}{\frac{LT^{-1}}{L}} = ML^{-1}T^{-1}$

Quantity	Symbol	Dimensions	
		$MLT\Theta$	$FLT\Theta$
Length	L	L	L
Area	A	L^2	L^2
Volume	\mathcal{V}	L^3	L^3
Velocity	V	LT^{-1}	LT^{-1}
Acceleration	dV/dt	LT^{-2}	LT^{-2}
Speed of sound	a	LT^{-1}	LT^{-1}
Volume flow	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
Mass flow	\dot{m}	M^{-1}	FTL^{-1}
Pressure, stress	p, σ, τ	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
Strain rate	$\dot{\epsilon}$	T^{-1}	T^{-1}
Angle	θ	None	None
Angular velocity	ω, Ω	T^{-1}	T^{-1}
Viscosity	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
Kinematic viscosity	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
Surface tension	Υ	MT^{-2}	FL^{-1}
Force	F	MLT^{-2}	F
Moment, torque	M	ML^2T^{-2}	FL
Power	P	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
Work, energy	W, E	ML^2T^{-2}	FL
Density	ρ	ML^{-3}	FT^2L^{-4}
Temperature	T	Θ	Θ
Specific heat	c_p, c_v	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Specific weight	γ	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
Thermal conductivity	k	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$FT^{-1}\Theta^{-1}$
Thermal expansion coefficient	β	Θ^{-1}	Θ^{-1}

قضیه پی – باکینگهام (Buckingham π theorem)



Edgar Buckingham

قضیه پی باکینگهام یک روش عمومیت یافته برای تعیین گروه های (اعداد) بی بعد حاکم بر یک مساله فیزیکی (یک جریان در مکانیک سیالات) است. مطابق این قضیه، چنانچه یک جریان وابسته به n کمیت بعد دار بوده و تعداد ابعاد این کمیت ها k باشد،

$$f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$$

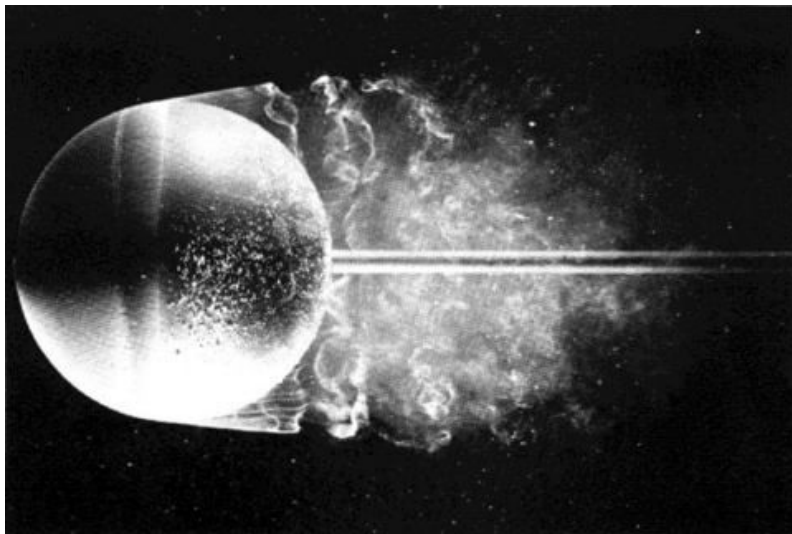
در اینصورت تعداد گروه های بی بعد حاکم بر این جریان $j = n - k$ است:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-k}) = 0$$

در روابط فوق، X_i معرف کمیت های بعد دار و Π_i معرف گروه های (اعداد) بی بعد است.

نحوه تعیین گروه های بی بعد حاکم بر یک جریان

جهت تعیین گروه های بی بعد (اعداد بی بعد) حاکم بر یک جریان باید از قضیه پی-باکینگهام استفاده نمود. این کار بصورت مرحله به مرحله در قالب یک مثال ارائه خواهد شد.



مثال ۱: نیروی درگ (F_D) وارد بر یک کره از سوی جریان یک سیال، تابعی از قطر کره (D)، سرعت بالادست جریان (U)، چگالی (ρ) و ویسکوزیته سیال (μ) است، گروه های بی بعد حاکم بر این مساله را مشخص نمایید.

مرحله اول: تشخیص کمیت های بعد دار حاکم بر جریان

از صورت مثال داریم که نیروی درگ تابعی از سرعت جریان، قطر کره و چگالی و ویسکوزیته سیال است، پس:

$$F_D = g(U, D, \rho, \mu)$$

بنابراین،

$$F_D - g(U, D, \rho, \mu) = 0$$

$$f(F_D, U, D, \rho, \mu) = 0$$

پس کمیت های بعد دار شامل نیروی درگ (F_D)، قطر (D)، سرعت (U)، چگالی (ρ) و ویسکوزیته (μ) است.

مرحله دوم: تعیین ابعاد کمیت ها باید بر اساس سیستم $\{MLT\}$ و $\{FLT\}$ تعیین شود:

F_D	D	U	ρ	μ
MLT^{-2}	L	LT^{-1}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$

مرحله سوم: تعیین تعداد گروه های بی بعد

با توجه به جدول ارائه شده در مرحله قبل تعداد کمیت های فیزیکی بعددار $n=5$ است. همچنین این پنج کمیت مجموعاً دارای هر سه دیمانسیون M ، L و T هستند بنابراین تعداد ابعاد کمیتها $k=3$ است. حال با استفاده از قضیه پی-باکینگهام می توانیم تعداد گروه های بی بعد را مشخص کنیم:

$$j = n - k = 5 - 3 = 2$$

بنابراین این مساله شامل **دو گروه بی بعد** است.

مرحله چهارم: از فهرست کمیت های فیزیکی مساله (ارائه شده در جدول مربوط به مرحله دوم)، تعداد k کمیت را انتخاب می کنیم که مجموعاً در برگیرنده تمامی ابعاد این مساله (M ، L و T) باشند. هر گروه بی بعد به شکل ضرب کمیت های مذکور با توانهای مجهول ضربدر توان اول هر یک از کمیت های باقیمانده قابل بیان هستند. در این مساله $k=3$ بوده و سه کمیت ρ ، U و D نیز شامل تمام ابعاد مساله (M ، L و T) هستند. بنابراین مطابق دستور فوق داریم:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \rho^{a_1} U^{b_1} D^{c_1} \mu \\ \Pi_2 &= \rho^{a_2} U^{b_2} D^{c_2} F_D\end{aligned}\tag{۱}$$

مرحله پنجم: با توجه به بی بعد بودن گروه های فوق داریم:

$$\Pi_1 = M^0 L^0 T^0 \quad \& \quad \Pi_2 = M^0 L^0 T^0$$

لذا با جایگذاری دیمانسیون کمیت ها (از جدول مربوط به مرحله دوم) در رابطه (۱) داریم:

$$\Pi_1 = \rho^{a_1} U^{b_1} D^{c_1} \mu = (ML^{-3})^{a_1} (LT^{-1})^{b_1} (L)^{c_1} (ML^{-1}T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

$$M^{a_1+1} L^{-3a_1+b_1+c_1-1} T^{-b_1-1} = M^0 L^0 T^0$$

بنابراین از رابطه فوق داریم:

$$\begin{cases} a_1 + 1 = 0 \\ -3a_1 + b_1 + c_1 - 1 = 0 \\ -b_1 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = -1 \\ c_1 = -1 \end{cases}$$

ادامه مرحله پنجم: به طریق مشابه برای گروه بی بعد دوم داریم:

$$\Pi_2 = \rho^{a_2} U^{b_2} D^{c_2} F_D = (ML^{-3})^{a_2} (LT^{-1})^{b_2} (L)^{c_2} (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

$$M^{a_2+1} L^{-3a_2+b_2+c_2+1} T^{-b_2-2} = M^0 L^0 T^0$$

بنابراین از رابطه فوق داریم:

$$\begin{cases} a_2 + 1 = 0 \\ -3a_2 + b_2 + c_2 + 1 = 0 \\ -b_2 - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ b_2 = -2 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

لذا گروه های بی بعد به شکل زیر قابل ارائه هستند:

$$\Pi_1 = \rho^{-1} U^{-1} D^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho U D} \quad \& \quad \Pi_2 = \rho^{-1} U^{-2} D^{-2} F_D = \frac{F_D}{\rho U^2 D^2} \quad (۲)$$

مرحله ششم: تطبیق گروه های بی بعد یافته شده در مرحله پنجم با گروه های بی بعد شناخته شده

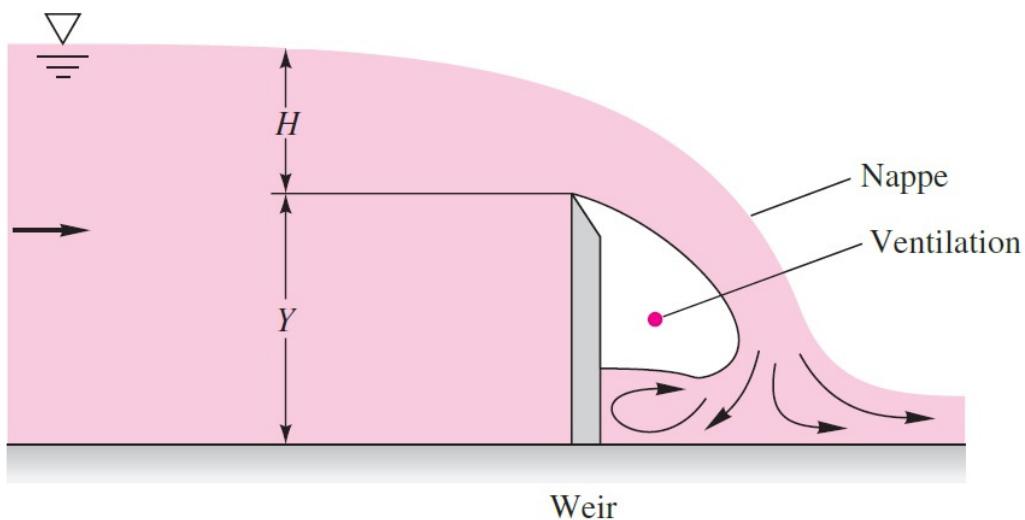
بایستی توجه داشت با به توان رساندن یا ضرب و تقسیم عدد ثابت در یک گروه بی بعد، آن گروه بی بعد همچنان بی بعد باقی می ماند. همچنین گروه های بی بعد یافته شده در مرحله قبل ممکن است که به فرم گروه های بی بعد معروف نباشند اما با به توان رساندن یا ضرب و تقسیم اعداد ثابت در آنها می توانیم به گروه های بی بعد شناخته شده در مکانیک سیالات برسیم. با توجه به جدول ارائه شده در اسلاید دوم برای گروه های بی بعد متوجه می شویم که با به توان ۱- رساندن (معکوس کردن) گروه بی بعد اول در معادله (۲) به عدد رینولدز می رسیم:

$$\Pi_1 = \text{Re} = \frac{\rho U D}{\mu}$$

همچنین با توجه به جدول ارائه شده در اسلاید شماره ۲ به متوجه می شویم که با ضرب کردن یک عدد ثابت ($\pi/8$) در مخرج گروه بی بعد دوم در معادله دو به ضریب درگ می رسیم:

$$\Pi_2 = C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho A U^2}$$

که در رابطه فوق A سطح تصویر کره بوده و برابر است با: $A = \pi D^2 / 4$



مثال ۲: مطابق شکل روبرو، شدت جریان یک سر ریز (q) تابعی از ارتفاع سرریز (Y)، ارتفاع آب بالای سرریز (H) و شتاب گرانش (g) است. گروه های بی بعد حاکم بر این جریان را تعیین کنید.

نکته: شدت جریان، دبی در واحد طول سرریز است:

$$q = Q / b$$

در رابطه فوق b طول سرریز است.

پاسخ:

مرحله اول: مشابه مثال قبل از صورت مساله داریم:

$$q = F(H, Y, g) \rightarrow q - F(H, Y, g) = 0 \rightarrow f(q, H, Y, g) = 0$$

بنابراین کمیت های بعد دار جریان شامل **چهار کمیت** q ، H ، Y و g و لذا داریم: $n=4$.

مرحله دوم: تعیین دیمانسیون کمیت ها،

q	H	Y	g
$\frac{L^3 T^{-1}}{L} = L^2 T^{-1}$	L	L	LT^{-2}

نکته: با توجه به جدول فوق، M (جرم) جز ابعاد مساله نیست و لذا مساله فقط شامل دو بعد L و T بوده و $k=2$ است.

مرحله سوم: تعیین تعداد گروه های بی بعد،

$$j=n-k=4-2=2$$

مرحله چهارم: تشکیل گروه های بی بعد،

باید از مقادیر داخل جدول فوق تعداد $k=2$ تا را انتخاب کنیم که مجموعاً دربرگیرنده تمام ابعاد مساله باشند. در این مثال کمیت های q و H برای این منظور انتخاب شده اند. مشابه مثال قبل، دو گروه بی بعد از ضرب عبارات توان دار q و H در توان اول Y و توان اول g قابل تشکیل هستند:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= q^{a_1} H^{b_1} Y \\ \Pi_2 &= q^{a_2} H^{b_2} g\end{aligned}\quad (3)$$

مرحله پنجم: تشخیص توانهای مجهول در گروه های بی بعد،

با قرار دادن ابعاد کمیت ها از جدول مربوط به مرحله دوم در داخل رابطه (۳) داریم:

$$\Pi_1 = (L^2 T^{-1})^{a_1} (L)^{b_1} (L) = L^{2a_1+b_1+1} T^{-a_1} = L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = (L^2 T^{-1})^{a_2} (L)^{b_2} (L T^{-2}) = L^{2a_2+b_2+1} T^{-a_2-2} = L^0 T^0$$

بنابراین از رابطه فوق دو دستگاه معادله به شکل زیر تشکیل می شود:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a_1 + b_1 + 1 = 0 \\ -a_1 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = -1 \end{cases} \rightarrow \Pi_1 = H^{-1} Y = \frac{Y}{H} \\ \begin{cases} 2a_2 + b_2 + 1 = 0 \\ -a_2 - 2 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a_2 = -2 \\ b_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \Pi_2 = q^{-2} H^3 g = \frac{H^3 g}{q^2} \end{aligned} \quad (۴)$$

مرحله ششم: شناسایی نهایی گروههای بی بعد،

حال بایستی که گروه های بی بعد ارائه شده در رابطه (۴) با روابط بی بعد معروف تطبیق داده شوند. در رابطه (۴)، گروه بی بعد اول صرفاً یک نسبت ابعادی است:

$$\Pi_1 = AR = \frac{Y}{H}$$

گروه بی بعد دوم بر حسب عدد فرود قابل بیان است. می توان از رابطه (۲) نوشت:

$$\Pi_2 = \frac{H^3 g}{q^2} = \frac{Hg}{\left(\frac{q}{H}\right)^2} \quad (5)$$

همانطور که پیشتر گفته شد، که می توان یک گروه بی بعد را به یک توان دلخواه رساند. با توجه به جدول ارائه شده در اسلاید دوم، می توان با به توان $-\frac{1}{2}$ رساندن طرفین رابطه (۵) عدد فرود رسید:

$$\Pi_2 = \left[\frac{Hg}{(q/H)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{(q/H)^2}{Hg} \right]^{+\frac{1}{2}} \rightarrow \Pi_2 = Fr = \frac{q/H}{\sqrt{Hg}} \quad (6)$$

نکته: توجه داشته باشید که در رابطه فوق عبارت صورت، سرعت متوسط جریان است: $U = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{Hb} = \frac{Q/b}{H} = \frac{q}{H}$

Thank
You!